1/ $(E_u) : z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2iu\bar{u} = 0$

$\Delta = (2u - i\bar{u})^2 + 8iu\bar{u} = 4u^2 - 4iu\bar{u} - \bar{u}^2 + 8iu\bar{u}$

$= 4u^2 + 4iu\bar{u} - \bar{u}^2 = (2u + i\bar{u})^2$

D'où les solutions de (E_u) sont :

$z' = \dfrac{2u - i\bar{u} - 2u - i\bar{u}}{2} = -i\bar{u}$ et $z'' = \dfrac{2u - i\bar{u} + 2u + i\bar{u}}{2} = 2u$

2/a- Soit u un élément de $\mathbb{C}$ tel que $u = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$M(u) \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow A, M'$ et M'' alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} // \overrightarrow{AM''}$

$* \text{aff}\left(\overrightarrow{AM'}\right) = z' - 2i = -i(x - iy) - 2i = -y + i(-x - 2) \Rightarrow \overrightarrow{AM'}\begin{pmatrix} -y \\ -x-2 \end{pmatrix}$

$* \text{aff}\left(\overrightarrow{AM''}\right) = z'' - 2i = 2x + 2iy - 2i = 2x + i(2y - 2) \Rightarrow \overrightarrow{AM''}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y-2 \end{pmatrix}$

$M(u) \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow -y(2y - 2) - 2x(-x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 + 4x + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + y = 0$

Ainsi $(\mathscr{H}) : x^2 - y^2 + 2x + y = 0$.

b- $M(x,y) \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + y = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x) - (y^2 - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 - \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

Soit le point $\Omega\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$. Soit le repère orthonormé $R' = \left(\Omega; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

Nommons $R = \left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

M est un point du plan; désignons par (x,y) les coordonnées de M dans R et par (X,Y) ses coordonnées dans le repère R'.

Donc $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{e_1} + Y\vec{e_2} \Leftrightarrow (x + 1)\vec{e_1} + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)\vec{e_2} = X\vec{e_1} + Y\vec{e_2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = X \\ y - \dfrac{1}{2} = Y \end{cases}$$

$M(X,Y)_{R'} \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow M(x,y) \in (\mathscr{H})$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow X^2 - Y^2 = \dfrac{3}{4}$.

D'où $(\mathscr{H}) : \dfrac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \dfrac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ dans R'.

Par suite $(\mathscr{H})$ est l'hyperbole équilatère de centre Ω, de sommets $S\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)_{R'}$ et $S'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)_{R'}$, de foyers $F(c; 0)_{R'}$ et $F'(-c; 0)_{R'}$